

~~~~~  
論 説  
~~~~~

# 社会科学における実証的シミュレーション： シェリングの分居モデルの拡張と 空間データとの接合例\*

伊 藤 岳\*\*  
山 影 進\*\*\*

## 概要

近年, 社会科学においてエージェントベース・モデリング (agent-based modeling: ABM) と呼ばれるシミュレーション技法の応用が進んでいる。特に目を引く動向として, モデルの結果・状況設定について, 理論的なシミュレーションと経験的なデータの接合を試みる実証志向の研究の進展が著しい (伊藤, 2013; Ito and Yamakage, 2015a)。こうした方法の発展は, これまで取り組めなかった新たな問いに回答する手段を提供する一方で, 新たな技術的障壁が生じることも意味する。本稿では, 著者らが他所で提示したモデルを前提に, こうした技術的障壁を緩和するソフトウェアと米国の都市の空間データを用いつつ, Schelling (1969, 1971, 1978) による古典的な ABM の分居モデル (segregation model) を事例に, 現実との明示的な接合を志向するシミュレーション・モデルの具体例を提示する。

---

\* 本稿に関連する研究について, 日本学術振興会科学研究費補助金 (24243023)・同特別研究員研究奨励費 (245785), および松下幸之助記念財団研究助成 (15-093) の助成を得た。

\*\* 東京大学大学院総合文化研究科国際社会科学専攻。Email: gakuatgu@gmail.com

\*\*\* 青山学院大学国際政治経済学部。Email: yamakage@sipeb.aoyama.ac.jp. Web: <http://yamakage-ken.com>.

## 1 序論

近年、社会科学においてエージェントベース・モデリング (agent-based modeling: ABM) と呼ばれる技法の応用が進んでいる<sup>1)</sup>。ABM はコンピュータ・シミュレーションの一種で、多数のエージェント (主体) から構成される仮想システムをコンピュータ上に構築することにより、エージェントの自律的 (しばしば空間的条件に制約された) 行動・相互作用の連鎖・集積から生じる結果を明らかにする。集計的な変数間の関係を方程式で記述するシステム・ダイナミクス (system dynamics: SD) とは対照的に、ABM ではエージェントの行動・相互作用のパターンを記述・描写 (モデル化) することで、ミクロ・レベルにおけるエージェントの行動・相互作用から自然に生じるマクロ・レベル (系全体のレベル) における結果を明らかにする (Gilbert 2008, 16–20; Macy and Willer 2002; 山本 2009)。この作業を通して、ある特定のクラスの (マクロ・レベルにおいて観察される) 現象を生成するのに十分な主体の行動・相互作用のメカニズムを明らかにすることが、ABM を用いた研究の主要な目的である。

特に目を引く最近の研究動向として、モデルの結果・状況設定について、理論的なシミュレーションと経験的なデータの接合を試みる実証志向の研究の進展がある (伊藤, 2013; Ito and Yamakage, 2015a)。従来、ABM はもっぱら  $N$  人囚人のジレンマの数値解の導出のような、「コンピュータによる実験 (computer laboratory for virtual experimentation)」(Crooks *et al.*, 2008, 418) を通じた理論研究に集中していた。これに対して、シミュレーション結果による何らかの現象の説明 (アウトプットの現実性) や、結果のみならず、モデルの初期状態・状況設定等によって現実との接合 (インプットの現実性) を図る研究の進展に、近年の特色がある (伊藤, 2013)。こうした技法は、着目する主体の意思決定・行動パターンを厳密に定義・操作化した上で、実証的知見を提示する直感的かつ有用な方法を、研究者に与えてくれる。

1) MAS (multi-agent simulation), MAM (multi-agent modeling) と呼ばれることもあるが、意味は同一である。社会科学においては、日本語では MAS が、英語では ABM が用いられることが多い。本稿では、Ito and Yamakage (2015a) でも用いた ABM に統一する。

著者らが専門とする国際関係論，特に武力紛争を巡る研究においても，こうした実証性を志向するモデルがいくつか提示されている（伊藤，2013；Ito and Yamakage, 2015a）。たとえば，Lim *et al.* (2007) と Weidmann and Salehyan (2013) はそれぞれ，旧ユーゴスラビアとインド，イラクのバグダードにおける民族・宗派的な居住形態と武装勢力による攻撃・暴力行使の蓋然性との関係を，現実の民族地勢を反映する空間データ（spatial data：位置情報をもつデータ）上で展開する実証的なモデルを用いて検証している。また，Bhavnani *et al.* (2014) は，エルサレムにおけるパレスチナ人・ユダヤ人の分居状況，民族地勢と攻撃・暴力行使の空間的パターンとの関係性を実証的な ABM を用いて検証するだけでなく，仮想的な政策的介入／民族的分居の変化が，将来における攻撃・暴力行使のパターンをいかに変容させるかという反実仮想的な（counterfactual）分析にも取り組んでいる。

もっとも，こうした実証的なシミュレーション・モデルは，空間データを用いたモデルに限られる訳ではない。実際，筆者らのグループでも，阪本ほか（2012）においてキューバ危機（1962年）を事例とした実証的なモデルを提示した。阪本ほか（2012）はモデルと現実との接合を図る上で，まずソ連によるキューバでのミサイル基地建設への対応を協議する米国国家安全保障会議執行委員会（Executive Committee of the National Security Council: ExComm）におけるケネディ（J. F. Kennedy）大統領ら主要な政策決定者の発言記録からその選好・認知構造を推定した。その上で，政策決定者を模したエージェントの選好・認知構造に経験的なデータを反映させ，エージェントが互いに説得を繰り返す中で，単一の政策が選択される政策決定過程をモデル化している。また，国連における投票行動から各国の政策的選好・規範認識を推定し，植民地独立付与宣言（1960年）に至る国際規範の変動・説得過程をモデル化した光辻・山影（2009）も，同様の試みといえる<sup>2)</sup>。かつて Epstein and Axtell (1996) は，研

---

2) 実証的なモデルではないものの，*American Journal of Political Science*, *American Political Science Review*, *International Studies Quarterly*, *Journal of Conflict Resolution*, *Journal of Politics* といった政治学・国際関係論の主要な学術誌に掲載された ABM を

究対象の現象をコンピュータを用いて仮想的に「作り上げる」ことで、その生成メカニズムを理解する (generative understanding) 技法と ABM を表現した。シミュレーション・モデルを実証研究に応用する試みは、現実との接近を通してこの発想をさらに一歩進めるものと位置付けることもできる。

このような方法論の発展は、これまで取り組めなかった新たな問いに回答する手段を提供する一方で、新たな技術的な敷居が生じることも意味する。たとえば、モデルと現実を接合する具体的な方法の1つに、上述のような現実の都市や国家の地理・社会経済的条件を、仮想的なモデル空間に近似的に反映することが考えられる。しかしながら、既に触れた Bhavnani *et al.* (2014) のような詳細な空間データと接合したシミュレーション・モデルを構築する上では、モデル構築に関連する基礎的なプログラミングのスキルだけでなく、空間データや地理情報システム (geographic information system: GIS) についての知識も求められる。特に紛争研究では戦闘・攻撃の発生地点や被害などを反映する詳細な空間データの整備が急速に進むものの (Gleditsch and Weidmann, 2012)、こうしたデータセットを活用する上での技術的な障壁は高い。阪本ほか (2012) や光辻・山影 (2009) のように非空間的なデータを用いるとしても、データセットの入手可能性に加えて、やはりそのハンドリングやモデルへの反映に伴う技術的な障壁が問題になる。

著者らのグループは近年、特に国際関係論を念頭に、ABM の実証研究への応用を中心的なテーマとする研究プロジェクトを進めてきた。その中で、こうした技術的要請を緩和するソフトウェアを構造計画研究所と開発し、Ito and Yamakage (2015a) では古典的なエージェントベース・モデルとして知られる Schelling (1969, 1971, 1978) の (人種間) 分居モデルとシカゴ市の人種別居住状況についての空間データを用いて、具体的な実装例を提示した。この中では、

---

用いた最近の論文に Bausch (2015a,b); Bhavnani *et al.* (2011); Findley and Rudloff (2012); Gartzke and Weisiger (2013); Kim and Hanneman (2014); Klasnja and Novta (2014); Miodownik and Bhavnani (2011); Siegel (2009, 2011, 2013); Weidmann (2015) などがある。

構造計画研究所 (<http://www.kke.co.jp>) が提供する artisoc, GIS data converter for artisoc を用いて、シカゴ市の行政区画と黒人・白人人口比率をモデルが展開する仮想空間に反映させることで、現実とモデルの明示的な接合を試みた。また、Ito (2015a,b,c); Ito and Yamakage (2015b) では、GIS data converter for artisoc のような空間データの簡易な変換用ソフトウェアは用いなかったものの、アフガニスタン戦争 (2001-) とロシア連邦北カフカス地方の内戦を事例に、地理的条件・社会経済的条件についての詳細な空間データを用いて、内戦における武装勢力による攻撃・暴力行使の発生日・件数を説明・予測するモデルを提案した。

本稿では、Ito and Yamakage (2015a) で提示したモデルをベースに、人種に見立てた属性を保持するエージェントの種類を増加させ、また意思決定ルールにも多様性をもたせたモデルを提示する。次節で説明するように、Schelling (1969, 1971, 1978) モデルの動態は、特定の人種属性を保持する個人・世帯に見立てたエージェントの属性値の空間的分布と異なる属性を保持する他のエージェントに対する「寛容さ (tolerance)」に依存するため、人種属性の追加はモデルの結果を左右し得る。また、現実の (米国の) 都市においても、主要な人種はシェリングの古典的なモデルのような 2 人種ではなく、3 人種以上であることが多い。さらに、異なる人種・民族集団の認識・境界線は必ずしも集団間で一致する訳ではない。上述のような拡張を導入することで、簡略ながら現実に近づいたモデルを構築することができる。

なお、本稿の目的は、分居モデルの詳細な解析や現実の都市における人種間分居状況についての包括的な説明の提示ではなく、古典的なモデルの拡張と経験的な空間データとモデルの接合例を提示することで、実証的なシミュレーション・モデルを構築する上での具体的な作業を例示することにある。その中で、構造計画研究所が提供するソフトウェア、特に GIS data converter for artisoc が技術的な障壁を緩和する上で有用となることにも触れる。上述のような国際関係論やその隣接分野における実証的シミュレーション・モデルの概観や、シミュレーション技法の実証研究への応用を巡る方法論的議論は伊藤 (2013) におい

て論じたため、本稿では割愛する<sup>3)</sup>。筆者らのグループによる実証的 ABM の紛争研究への応用例については、Ito (2015a,b,c); Ito and Yamakage (2015b); 阪本 (2011) を参照されたい。

以下、第 2 節では Schelling (1969, 1971, 1978) の分居モデルの構造と基本的な動態・結果を概観した上で、エージェントの種類と意思決定ルールの多様化という 2 つの拡張を導入する。第 3 節では、現実の都市の空間データとモデルを接合した上で、試行結果を提示する。第 4 節では結論として本稿の議論を確認した上で、今後の可能性と課題を論じる。

## 2 シェリングの分居モデル

以下、シェリングの分居モデルを一般化した形で実装する(第 2 節)。その上で、米国シカゴ市の空間データと US Census 2010 (Almquist, 2010) を用いて、モデルを現実の事例と接合する(第 3 節)。ここでシェリングの分居モデルを用いるのは、次の 2 つの理由による。

第 1 に、このモデルは古典的な ABM として有名で、その簡潔さから ABM の技法を教授する際にもサンプルとして頻繁に用いられるなど、広く知られ、モデルの単純な構造から拡張も容易なことがある。もっとも、オリジナルのモデルを提案した当時、コンピュータの性能的な問題もあり、シェリング自身はエージェントに見立てたコインとチェス盤、サイコロおよび数理的な解析によってこのモデルについての論文を執筆した (Schelling, 1969, 1971, 1978)。しかしながら、以下の実装例からも明らかな通り、分居モデルのような多数の主体が自律的に行動を繰り返すモデルはある種のエージェントベース・モデルであり、筆者の 1 人による教科書でもこのモデルの実装例を紹介している (山影, 2007)。また、広く利用されている ABM 向けソフトウェアである Repast (<http://repast.sourceforge.net>) や NetLogo (<https://ccl.northwestern.edu/netlogo/>) も、サンプル・モデルの中に古典的なエージェントベース・モデルとして分居モデルを含

---

3) 政治学におけるエージェントベース・モデルについての包括的なレビューに、de Marchi and Page (2014) がある。

めている。

第2に、学術的・理論的有用性がある。後述のように、分居モデルは数個のパラメータと意思決定ルールで定義される簡潔な (parsimonious) 構造をもつだけでなく、社会を構成する個々人 (エージェント) が穏やかな分居選好をもつ場合でさえも、社会全体のレベルでは明確な人種的分居状況が生じ得るという、一見直感に反する知見を提示する。モデルの簡潔さ故に、論理の拡張や経験的なデータとの接合を通じた現実への接近が比較的容易なこともあり、現実の社会でしばしば看取される人種的分居現象の原因・メカニズムを紐解く上での「理論的基礎 (theoretical basis)」とまで表現される (Clark and Fossett, 2008, 4109)。実際、Benenson *et al.* (2002, 2009); Bruch (2014); Crooks (2008); Yin (2009) は、米国、イスラエル、英国における人種・民族的分居現象を取り上げつつ、分居モデルの拡張と経験的なデータとの接合を通して、その原因を検証している。また、筆者らの専門とする武力紛争研究においても、人種・民族的分居現象は内戦における戦闘・暴力の発生に影響することが知られ、Bhavnani *et al.* (2014); Lim *et al.* (2007); Weidmann and Salehyan (2013) が経験的なデータと ABM の技法を用いた実証研究を提示している。これらの紛争研究も、分居モデルを意識したモデルを提示する。

## 2.1 モデルの論理と性質<sup>4)</sup>

Schelling (1969, 1971, 1978) の分居モデルは、異なる人種属性を保持するエージェントの空間的居住状況・分布を、エージェント間の相互作用の帰結として捉える。ここでは、モデルが展開する空間として、図1(a)に示した  $150 \times 150 = 22,500$  個の格子からなる正方格子空間を考える。もっとも、モデルの空間構成が正方格子である必要はなく、たとえば六角格子空間でも問題はない。ここでは、オリジナルのモデルがチェス盤を用いたことと、後にモデル空間に現実の都市の空間データを反映させる上で作業が簡略となることから、正方格子空

4) このサブセクションの内容は、Ito and Yamakage (2015a) で報告したものを整理したものである。

間を用いる。個々の格子には、人種に見立てた属性値  $g \in G$  を保持するエージェントが居住し、一定割合の格子は「何もない」（エージェントが存在しない）状態とされ、エージェントが移動先として選択することができる。図1では、黒の格子がエージェントが存在しない格子を、濃度の違うグレーの格子が異なる属性値  $g$  と  $\neg g$  を保持するエージェントをそれぞれ示す。

モデルにおける時間は離散的な単位  $t$  で進展し、各エージェントは毎期、(1) 現在の居住地（格子）の好ましさを下記のルールに従って計算し、(2) もし現在の格子の周辺状況が好ましくなければ他の何も存在しない格子に移動しようとする。このモデルにおいて、エージェントは同一の属性  $g$  を保持するエージェントが、自らの周囲に一定程度存在することを緩やかに好むと仮定される。したがって、(1) と (2) の意思決定は、エージェントが位置する格子の周辺状況とその「好ましさ」を評価する閾値に依存する。

形式的には、このモデルは次のように表現できる。モデルを構成するエージェント  $Ag_i$  は属性値  $g_j$  を保持する。試行（シミュレーション）の開始時点において、 $Ag_i$  には属性値  $g_j$  が任意の確率で割り振られ、モデル空間上にランダムに配置される。このとき、パラメータ  $0 < \pi < 1$  の割合の格子にはエージェントは配置されず、各エージェントが移動先として選択できる。したがって、エージェントが存在する格子の割合は  $1 - \pi$  となる。エージェントの意思決定ルールは、次のようになる（Benenson *et al.*, 2009, 468–470）。なお、 $g$  および  $\pi$  は1回の試行を通じて固定され、すべてのエージェントに共通のモデル・パラメータである閾値  $\theta$  と近傍集合の定義  $N$  も1回の試行を通じて固定される。

- (1)  $t$  期において、属性値  $g_j$  を保持する  $Ag_i$  は、自らが位置する格子  $C_k$  の近傍集合  $N_k$  に存在するエージェントの中で、自らと同じく  $g_j$  を保持するエージェントの割合  $s_{kt} = \frac{\# \text{ agents with } g_j \text{ within } N_k}{\# \text{ all agents within } N_k}$ （「好ましさ」）を算出する。
- (2)  $s_{kt} < \theta$  ならば、 $Ag_i$  は他の格子への移動を試みる。 $s_{kt} \geq \theta$  であれば、現在の格子に留まる。

- (3) 移動を試みる場合、 $Ag_i$  はエージェントが存在しない格子  $C_l$  をランダムに選択し、(1) のルールに従って  $s_{li}$  を計算し、 $C_l$  の好ましさを評価する<sup>5)</sup>。
- (4)  $s_{li} > s_{kt}$  であれば  $Ag_i$  は  $C_l$  に移動するが、 $s_{li} \leq s_{kt}$  であれば  $C_k$  に留まる。
- (5)  $Ag_i$  が移動した場合、 $C_k$  は何も存在しない状態となり、他のエージェントが  $C_k$  に移動可能になる。

すべてのエージェントが上記の意思決定・行動選択を終えると、時間単位  $t$  は“1”進展し  $t+1$  期に進む。1回の試行は、(1) すべてのエージェントが現在位置する格子に満足する均衡状態あるいは(2) エージェントの移動は続くものの、近傍集合に存在するエージェントの構成に変化が生じない状態にエージェントの空間的分布が達するか、(3) 時間単位  $t$  が上限値  $T=10,000$  に達するまで継続する。オリジナルのモデルでは、閾値  $\theta=1/3$ 、また近傍集合の定義  $N$  は  $3 \times 3$  のムーア近傍 (Moore neighborhood: 周囲の8つの格子を近傍とする定義) とされていた。このモデルの動態・結果は  $\theta$  と  $N$  に強く依存することが知られている (e.g., Bruch and Mare, 2006; Clark and Fossett, 2008; Crooks, 2008; Hatna and Benenson, 2014; Laurie and Jaggi, 2003; Vinkovic and Kirman, 2006)。

図1(b)は、閾値  $\theta=1/3$ 、近傍集合の定義  $N$  を  $3 \times 3$  のムーア近傍としたときの均衡状態を示す。 $t=1$  の初期状態では、エージェントはランダムに格子空間上に配置されるため、異なる属性値を保持する(色の異なる)エージェントが混住している(図1(a))。実際、近傍集合に存在するエージェントの内、同じ属性値を保持するエージェントの割合  $s_{kt}$  の平均値  $S_t$  は、 $t=1$  のとき約 0.5 となる。これに対して、 $t=48$  の均衡状態では、 $S_{48}=0.763$  となり、異なる属性値を保持するエージェント間で明確な分居状態が生じる。

---

5) 1回の意思決定について、 $Ag_i$  は移動先の候補として  $C_l$  を1つのみ選択する(移動可能なすべての格子を網羅的に探索する訳ではない)。この仮定は試行を高速化するための便宜的なものであり、これを変更してもモデルの結果に大きな差異は生じない。

シェリング自身が強調するように (Schelling, 1978, 148-155), ここで興味深いのはマイクロとマクロの「乖離」である。すなわち, エージェントの選好というマイクロのレベルでは  $\theta=1/3$  という穏やかな選好でしかないにもかかわらず, 系全体というマクロのレベルではマイクロの選好を大きく超える分居状態が観察される。言い換えれば, 都市全体のレベルで人種的分居状態が観察されるとしても, それを構成する個々人が明確な分居を強く好んでいるとは限らないことを, このモデルは極めて簡潔に示している。

$\theta$  と  $N$  を変化させるとモデルから生じるエージェントの空間的分布 (分居状態) が変化する。簡潔に言えば,  $\theta$  は「分居の<sup>・</sup>度<sup>・</sup>合<sup>・</sup>い (levels of segregation)」を強く規定する一方 (図 1(c),(d)),  $N$  は「分居の<sup>・</sup>様<sup>・</sup>相 (forms of segregation)」を規定する (図 1(e),(f))。図 1(c),(d) には, 閾値  $\theta=1/4$  と低く設定した場合と,  $\theta=3/4$  と高く設定した場合の試行結果を示した。 $\theta=1/4$  はエージェントが他の属性を保持するエージェントが近傍に存在することに寛容な (tolerant) ことを,  $\theta=3/4$  は非寛容な (intolerant) なことを意味する。図から見て取れるように,  $\theta$  の増加とともに同一の属性値を保持するエージェントからなるクラスターの大きさが増加し, 格子空間全体に一層明確な分居が生じる。

図 1(e),(f) には  $N$  を変化させた場合の試行結果を示した。図 1(b) と比較すれば明らかなように,  $N$  が大きく, エージェントがより広い範囲の近傍格子を参照する場合には, 同一の属性値を保持するエージェントからなる分居クラスターと, 異なる属性値を保持するエージェントからなるモザイク状の混住地区が, モデル空間上に並存する<sup>6)</sup>。この傾向は, 近傍集合を  $7 \times 7$  のムーア近傍と定義した図 1(f) で一層明確に生じている。

表 1 には, 以上のパラメータ設定のそれぞれについて 300 回の試行を行なった結果をまとめた。

6) 分居モデルの動態・均衡状態に対する近傍集合の定義の影響についてのより包括的な検討については, Fossett and Waren (2005); Laurie and Jaggi (2003) がある。

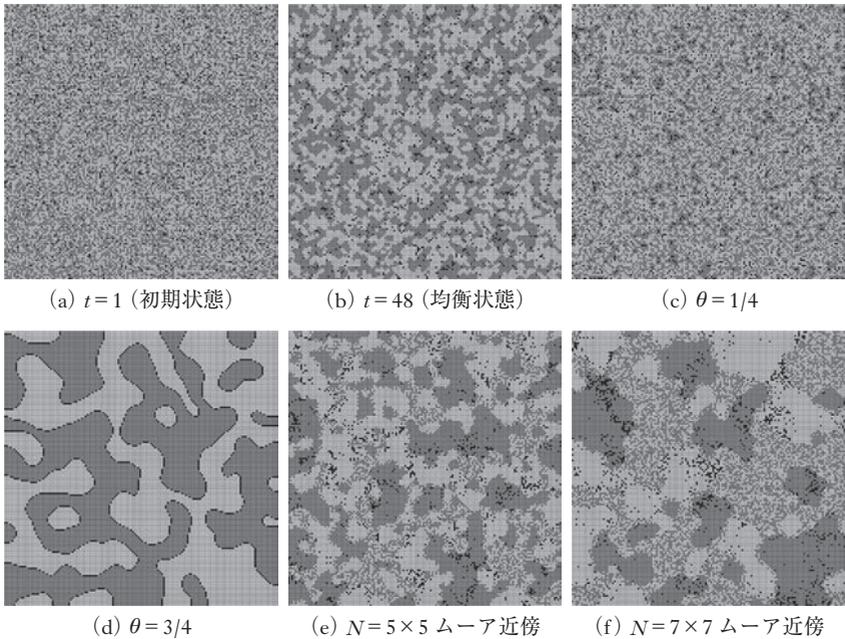


図 1: 150×150 の正方格子空間におけるシェリングの分居モデル

(a) は初期状態 ( $t=1$ ) を, (b) は均衡状態 ( $t=48$ ) におけるエージェントの空間的分布を示す。濃度の異なるグレーの格子は異なる属性値を保持するエージェントが存在する格子を, 黒のセルはエージェントが存在しない格子を示す ( $\pi=0.05, \theta=1/3$ )。 (c) 閾値が  $\theta=1/4$  と小さい場合には, 分居状況は消失こそしないものの, 同一の属性値を保持するエージェントから構成されるクラスターは小さくなる。 (d) 他方,  $\theta=3/4$  の場合には分居状況がベースライン ( $\theta=1/3$ ) に比べても明確に生じ, 同一の属性値を保持するエージェントのクラスターも大きくなる。 (e), (f)  $\theta=1/3$  とした上で  $N$  を  $5 \times 5$  のムーア近傍 (24 の格子),  $7 \times 7$  のムーア近傍 (48 の格子) として, エージェントが参照する近傍集合の定義を変化させた。

表 1: パラメータ設定を変化させた 300 試行

	パラメータ設定				
	$\theta=1/3,$ $N=3 \times 3^a$	$\theta=1/4,$ $N=3 \times 3$	$\theta=3/4,$ $N=3 \times 3$	$\theta=1/3,$ $N=5 \times 5$	$\theta=1/3,$ $N=7 \times 7$
$\langle S_T \rangle$	0.757(0.004)	0.566(0.003)	0.980(0.001)	0.752(0.014)	0.741(0.088)

$\langle S_T \rangle$  は全試行終了時の分居度合いの平均値, ( ) 内は標準偏差

<sup>a</sup> ベースライン設定

## 2.2 モデルの拡張

**拡張 1: 属性値の追加** ここでは、上述の分居モデルの2つの簡略な拡張を考える。まず、モデルの最も単純な拡張として、エージェントが保持する属性値  $g$  の種類を増加させることが考えられる。上述の設定では、エージェントの属性値が2つのみの場合を考えていたが、ここでは  $g_1, g_2, g_3$  という3つの属性値のいずれかを、エージェントが保持し得るよう、モデルを拡張する。分居モデルにおけるエージェントの属性値は人種・言語・民族集団のような何らかの観察可能な個人・集団の特徴として解釈することが多い。属性値の種類を増やすという拡張は、白人と黒人の住民に加えて、たとえばアジア系住民をモデルに加えることに相当する。

**拡張 2: 意思決定ルールの拡張** ここでは、もう1つ拡張を考えたい。ここまでのモデル設定では、すべてのエージェントが同一の意思決定ルールに従って行動すると仮定していた。すなわち、上述の通り、近傍集合に存在するエージェントの内、自らと同じ属性値を保持するエージェントの割合  $s_{ji}$  をもって、格子  $C_k$  の好ましさを評価していた。とはいえ、経験的にも、サーヴェイ調査においても集団毎に分居選好が異なることや、集団によっては選好の分布が閾値ルールと整合的ではない可能性も指摘されている (e.g., Bruchand Mare, 2006; Clark, 1991; Farley *et al.*, 1978)。また、たとえば、ヒスパニック系・非ヒスパニック系といった非人種的な境界線と、白人・黒人といった人種の境界線が米国情勢調査 (US Census) で用いられているように、人種・民族集団の境界線は多様であり、集団に属する個人の認識を左右する境界線も多様であり得る。

こうした意思決定を巡る拡張や経験的な知見を反映させる方法は多数考えられるが、ここでは簡易な拡張として、新たに追加した3種類目の属性値を保持するエージェントの意思決定ルールには非対称性を導入する。具体的には、このエージェントは、自らと同じ属性値を保持するエージェントに加えて、他の2種類の属性値の内、1種類の属性値を保持するエージェントも「同じ属性値」と評価する。新たなエージェントの属性値を  $g_3$  とすると、このエージェントは

異なる属性値  $g_1, g_2$  を保持するエージェントの内、 $g_1$  を保持するエージェントについては  $g_3$  を保持するエージェントと同じように認識し、近傍における  $g_1, g_3$  を保持するエージェントの割合に基づいて行動を決定すると考える。したがって、属性値  $g_3$  を保持するエージェントについては、 $s_{ji} = \frac{\# \text{ agents with } g_3 \text{ within } N_k}{\# \text{ all agents within } N_k}$  ではなく、 $s_{ji} = \frac{\# \text{ agents with } g_1 + \# \text{ agents with } g_3 \text{ within } N_k}{\# \text{ all agents within } N_k}$  となる。したがって、近傍格子における  $g_1$  あるいは  $g_3$  に属するエージェントの割合が  $\theta$  以上存在する場合、このエージェントは現在の格子に留まるが、そうではない場合には他の格子に移動しようとする。

この意思決定ルールは、人種・民族集団間の相互認識に非対称性を導入する最低限のものと解釈できる。この非対称性を導入することで、複数の集団間の相互認識が必ずしも一致する訳ではなく、集団間の「仲間意識」や参照する「集団の分かれ目」に差異がある状況を簡易に表現できる。ある民族集団 A からすれば、民族集団 A に属する個人も民族集団 B に属する個人も内集団 (in-group) であるものの、民族集団 B に属する個人から見れば民族集団 B に属する個人のみが内集団であり、民族集団 A に属する個人は外集団 (out-group) と認識するといった構図を、この非対称性を導入することで表現できる。

**2つの拡張を導入した場合の試行結果** これら2つの拡張を導入した場合の試行結果を、図2、表2に示す。図1、表1の拡張導入前の結果と比較した場合、パラメータ  $\theta, N$  が全体的な分居傾向  $\langle S_T \rangle$  の大小に与える傾向については明確な差異は見られない。すなわち、他集団に対して寛容な意思決定ルールをもつエージェントの導入が、モデル空間全体における分居傾向を緩和することはない。他方で、質的な分居傾向については差異が生じる。特に、 $\theta$  の大きい図2(d)が明確に示すように、異なる属性  $g_1$  に寛容な  $g_3$  を保持するエージェント群も、独自のクラスターを形成している。他方で、図2(f)のように  $N$  が大きい場合には、 $g_3$  の属性値を保持するエージェントと  $g_1$  を保持するエージェントが明確なクラスターと混住地域の両方を形成する一方で、 $g_2$  の属性値を保持するエージェントは同一の属性値を保持するエージェントからなるクラスターのみに

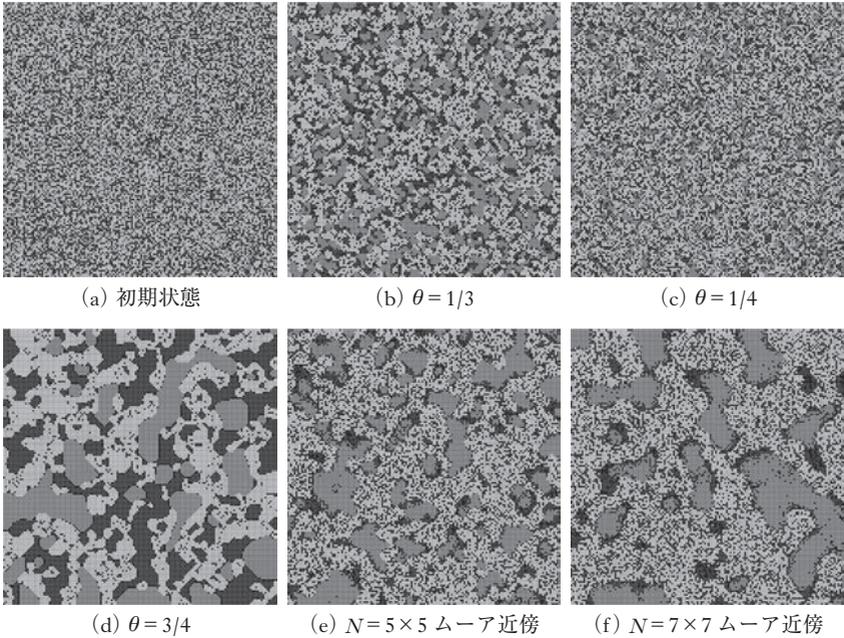


図 2: エージェントの属性  $g$  と意思決定ルールの拡張を導入した場合の試行結果

いずれのパネルにおいても、最も濃いグレーが  $g_3$  の属性値を保持するエージェントを示し、最も薄いグレーが  $g_1$  を保持するエージェントを示す。また、 $g_1, g_2, g_3$  を保持するエージェントの比率は、 $1:1:1$  に固定した ( $\pi=0.05$ )。 (e), (f)  $\theta=1/3$  とした上で  $N$  を  $5 \times 5$  のムーア近傍 (24 の格子),  $7 \times 7$  のムーア近傍 (48 の格子) として、エージェントが参照する近傍集合の定義を変化させた。

表 2: パラメータ設定を変化させた 300 試行 (拡張モデル)

	パラメータ設定				
	$\theta=1/3,$ $N=3 \times 3^a$	$\theta=1/4,$ $N=3 \times 3$	$\theta=3/4,$ $N=3 \times 3$	$\theta=1/3,$ $N=5 \times 5$	$\theta=1/3,$ $N=7 \times 7$
$\langle S_T^{\text{sym}} \rangle$	0.710(0.004)	0.524(0.003)	0.961(0.007)	0.719(0.009)	0.757(0.015)
$\langle S_T^{\text{asym}} \rangle$	0.727(0.003)	0.596(0.003)	0.914(0.006)	0.739(0.004)	0.747(0.006)

$\langle S_T^{\text{sym}} \rangle$  は 3 種類の属性値を保持するエージェントが同一の行動ルールに従う場合の、 $\langle S_T^{\text{asym}} \rangle$  は  $g_3$  を保持するエージェントについて非対称な意思決定ルールを導入した場合の、全試行終了時における分居度合いの平均値。( ) 内は標準偏差

$a$  ベースライン設定

を形成する。したがって、特定の他の属性値に寛容な意思決定ルールをもつ新たなエージェントの導入は、モデル空間全体の分居度合いを緩和することはないものの、 $N$ とは異なる意味で、分居の具体的な様相を特徴付ける。

### 3 空間データとの接合と試行結果

前節では、分居モデルの論理と基本的な動態・結果を確認した上で、エージェントの属性値の追加と意思決定ルールの多様化という2つの拡張を導入した。本節では米国シカゴ市と米国国勢調査 (US Census 2010) の空間データを用いて (Almquist, 2010), 分居モデルという抽象的なモデルと現実の事例との簡易な接合を図る。

#### 3.1 空間データ上における分居モデル

空間データ上で実行するモデルの設定については、前節の議論から次のものが適切と考えられる。第1に、近傍集合の定義  $N$  を大きく設定することがある。以下でみるように、現実の都市における人種の分居状況には、同じ人種に属する住民のクラスターのみならず、異なる人種に属する住民が混住する地域が観察される (Charles, 2003; Logan *et al.*, 2011)。こうした現象を検討する上では、オリジナルの分居モデルよりも、同一の属性値を保持するエージェントのクラスターと異なる属性値を保持するエージェントのモザイク地域を同時に生成するモデルが適切だろう。前節の議論から、これは  $N$  の大きいときのモデルの結果に対応する。

第2に、エージェントの属性値と意思決定ルールがある。上述のように、現実の米国の都市を念頭に置けば、3以上の属性値を設定することが自然だろう。また、上述のように人種・民族集団の境界線は多様であり、集団に属する個人の認識を左右する境界線も多様であり得ることを踏まえれば、拡張として導入した非対称な属性値認識・意思決定ルールを用いることが望ましい。したがって、以下のモデルでは前節で導入した2つの拡張を用いる。

図3には、US Census 2010のデータセットを用いて、シカゴ市にはほぼ対応

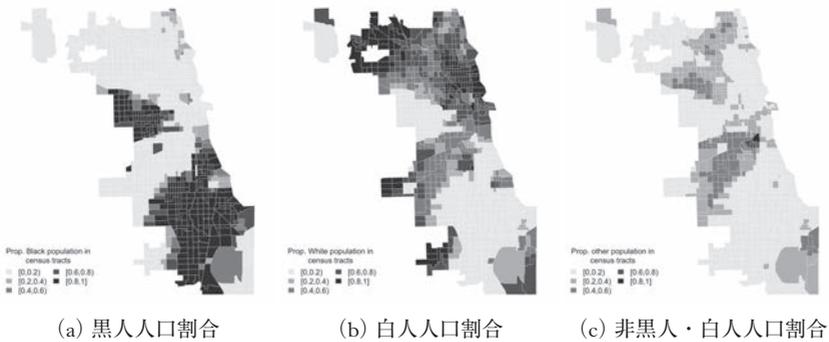


図 3：シカゴにおける人種的分居

各パネルは、黒人人口、白人人口、および非黒人・白人人口が各センサス単位の総人口に占める割合を濃度で示す。(a),(b)において、黒人人口割合、白人人口割合が大きい地域が明確に分かれるのに対して、(c)の非黒人・白人人口割合が大きい地域は白人人口割合が高い地域に近接する傾向にある。

するセンサス単位 (census tract) での人種別人口変数を用いて分居状況を示した (Almquist, 2010)<sup>7)</sup>。現実の都市においても、人種的分居が生じてる様子が見て取れる。特に、図 3(a),(b),(c) から、黒人人口割合が大きい地域と白人人口割合が大きい地域が分かれる一方、白人人口割合の大きい地域と非黒人・白人人口割合が大きい地域は近接・重複することがわかる。<sup>8)</sup>

こうした現実の空間データと分居モデルを接合する作業をする、図 4(a)は実際の 801 センサス単位を示した。図 4(b) に示した格子空間はおおよそ現実のセンサス単位に対応し、格子の 1 辺は約 150 m に相当する。通常、こうした空間データの変換やモデルへのインポート作業には GIS や統計パッケージの技能が必要とされるが、ここではサンプルとしての役割も兼ねて、この作業をサポート

7) US Census 2010 のデータセットとセンサス単位の空間データの取得には、R 3.2.0 for OSX および UScensus2010 パッケージ (Almquist, 2010) を用いた。

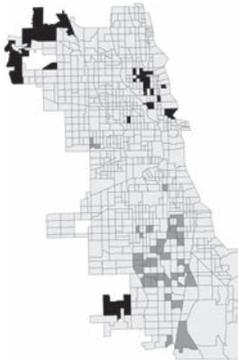
8) なお、ここで非黒人・白人人口には、“American Indian and Alaska Native alone” (P003p0004)、“Asaian alone” (P0030005)、“Native Hawaiian and Other Pacific Islander alone” (0030006)、“Some Other Race alone” (P0030007)、および “Two or More Races” (P0030008) が含まれる。



(a) センサス単位



(b) 対応する格子空間



(c) 黒人ないし白人の人口比率が高いセンサス単位 (d) 対応する格子の初期配置



図 4: シカゴのセンサス単位とモデル空間への反映

(a) の現実のセンサス単位が、(b) のようにモデル空間に反映される。エージェントの初期配置をコントロールするため、(c) に示した黒人ないし白人の人口割合が最も高い 40 ずつのセンサス単位については、(d) のように特定の属性値を保持するエージェントのみを初期状態において配置した。(d) では、最も色彩の濃い箇所が白人人口に見立てた  $g_2$  を保持するエージェントのみが、次に色彩が濃い箇所が黒人人口に見立てた  $g_1$  を保持するエージェントのみを配置した格子に対応する。

トするために構造計画研究所が開発した GIS data converter for artisoc を用いて変換作業を行なった。このソフトウェアはしばしば技術的な障壁となる空間データの変換作業、モデル空間への反映作業をサポートするために開発されたものであり、空間データ・GIS の取り扱い経験の浅い利用者でも容易に扱える。

### 3.2 パラメータ設定

分居モデルの動態・均衡状態において、何らかの分居傾向が生じることはモデルの一般的な特性だが、ある試行において、モデル空間上のどの地域にクラスターやモザイク状の地域が生じるかという具体的な分居の様相は当該試行の初期値や乱数に依存する。Ito and Yamakage (2015a) では、こうした鋭敏性をコントロールするため、「ある一定の地域には黒人あるいは白人に見立てた属性値を保持するエージェントのみが、初期状態において存在する」という仮定を設けた。現実の都市における分居現象に包括的な説明を与えるためにはこうした外生的なパラメータ設定・仮定をなるべく排除することが望ましいが、ここでの目的はあくまでモデルと現実との接合の例示であるため、この仮定を踏襲する。具体的には、図 4(c), (d) に示したように、801 のセンサス単位のうち、黒人と白人の人口割合それぞれの上位に位置する 40 ずつのセンサス単位に対応する格子には、初期状態において  $g_1, g_2$  を保持するエージェントのいずれかのみを割り当てた。全人口に占める割合が小さい非黒人・白人人口の大きいセンサス単位については、この作業を行わなかった<sup>9)</sup>。

また、エージェントの意思決定ルールについては、黒人人口 ( $g_1$  を保持)、白人人口 ( $g_2$  を保持) に見立てたエージェントについてはオリジナルの分居モデルのルールを用いた。他方、非黒人・白人人口に見立てたエージェント ( $g_3$  を保持) については、前節の拡張で導入した寛容なルールを導入し、 $g_2$  を保持するエージェントを、 $g_3$  を保持するエージェントと同様に評価するようにモデル化した。直接的に表現すれば、非黒人・白人人口に見立てた  $g_3$  を保持するエー

9) 2010 年国勢調査において、黒人と白人の人口はシカゴ市の全人口の約 78% を占める ( $= \frac{2,120,659}{2,718,590}$ )。

エージェントは、 $g_3$  を保持するエージェントもしくは白人人口に見立てた  $g_2$  を保持するエージェントの近傍の格子における割合が  $\theta$  以上となるよう移動を繰り返す。他方、 $g_1, g_2$  を保持するエージェントは、自らと同一の属性値を保持するエージェントの近傍格子における割合のみを参照して意思決定を行なう。

なお、閾値と近傍集合については  $\theta = 1/3$ ,  $N = 5 \times 5$  ムーア近傍とし、 $g_1, g_2, g_3$  を保持するエージェントの割合は、現実の人口比率をおおよそ反映する形で、 $g_1$  を保持するエージェント数 (黒人人口) :  $g_2$  を保持するエージェント数 (白人人口) :  $g_3$  を保持するエージェント数 (非黒人・白人人口) = 35 : 45 : 20 とした。

### 3.3 試行結果

上述のように設定したモデル空間において、分居モデルを実行した試行結果を以下に示す。Ito (2015a,b,c) ; Ito and Yamakage (2015b) で提示したように、シミュレーション・モデルを用いた本格的な実証研究においては、試行結果の現実に対する一致度や説明力・予測力を評価するための尺度や体系的な検証作業が必要になる。しかしながら、こうした作業は技術的に手続きが煩雑になり、また本稿の射程を超えるためここでは省略し、試行結果を視覚的に示すに留めたい。

図5に、上述の空間・パラメータ設定を用いた12試行の均衡状態を示す。図5の各試行が示す通り、エージェントの初期配置をコントロールした場合、分居モデルは図3の現実の分布に類似するエージェントの空間分布を生成する。もっとも、ここで用いた初期配置はシカゴ市の現実をある程度反映しているにせよ、現実の都市における人種間の分居現象に対してただちに説明力をもつものではない。現実を観察される分居現象を説明する上では、評価尺度を定め、モデルの説明力・予測力の体系的な検証や、たとえば土地・物件価格や利便性のような、居住地選択に影響を与えるであろう他の要因、既に触れたような他人種・民族集団の居住状況についての選好の多様性などをモデルに反映する作業などが必要になる。

とはいえ、ここで示した結果は、初期状態のコントロールと緩やかな人種の

分居選好という単純な論理でさえも、現実に類似する分居パターンを生成し得ること、またシェリングの分居モデルが現実に観察される分居現象に対して説明力をもつことを示唆しており、発展的な実証分析の参照点として有用なことを示している。こうした現実の空間データとモデルの出力との直接的な比較は、経験的なデータと接合した実証的 ABM の技法によって容易に行なうことができる。実際、筆者らも Ito (2015a,b,c); Ito and Yamakage (2015b) において、内戦における武装勢力の意思決定・行動パターンを規定し得る多様な要因をモデル化した上で、アフガニスタンや北カフカス地方の社会経済的・地理的条件と紛争における戦闘・暴力行使の空間的分布を指標として、武装勢力の意思決定・行動選択を規定する要因を明らかにする実証分析に取り組んだ。ここで示した分居モデルとシカゴ市の空間データとの接合は、こうした体系的な実証分析の開始地点に他ならない。前節での分居モデルの拡張作業のように、単純なモデルに社会経済的要因や他の意思決定ルールを加えていくことで、現実に観察される分居現象の背後に働く要因・メカニズムを明らかにする実証分析に取り組むことができる。

#### 4 結論

近年、社会科学において ABM の実証研究への応用が進展している。この技法は、着目する主体（エージェント）の意思決定・行動パターン（メカニズム）を厳密に定義・操作化した上で、実証的知見を提示するための直感的かつ有用な方法を、研究者に与えてくれる。他方で、こうした技法を利用し研究に取り組む上では、プログラミング技法だけでなくデータセットの取り扱い技術が求められる。特に、GIS・空間データと接合した ABM を用いた実証分析はいくつか提示されているものの、こうした研究に取り組む上での技術的な障壁は高い。本稿では、筆者らのプロジェクトで構造計画研究所と開発した *artisoc* および *GIS data converter for artisoc* を用いて、古典的なシェリングの分居モデルを用いた実証的 ABM の初歩的な事例を提示した。本格的な実証分析に取り組む上では、仮説の明確化や検証のための指標の洗練化などが必要になるものの、

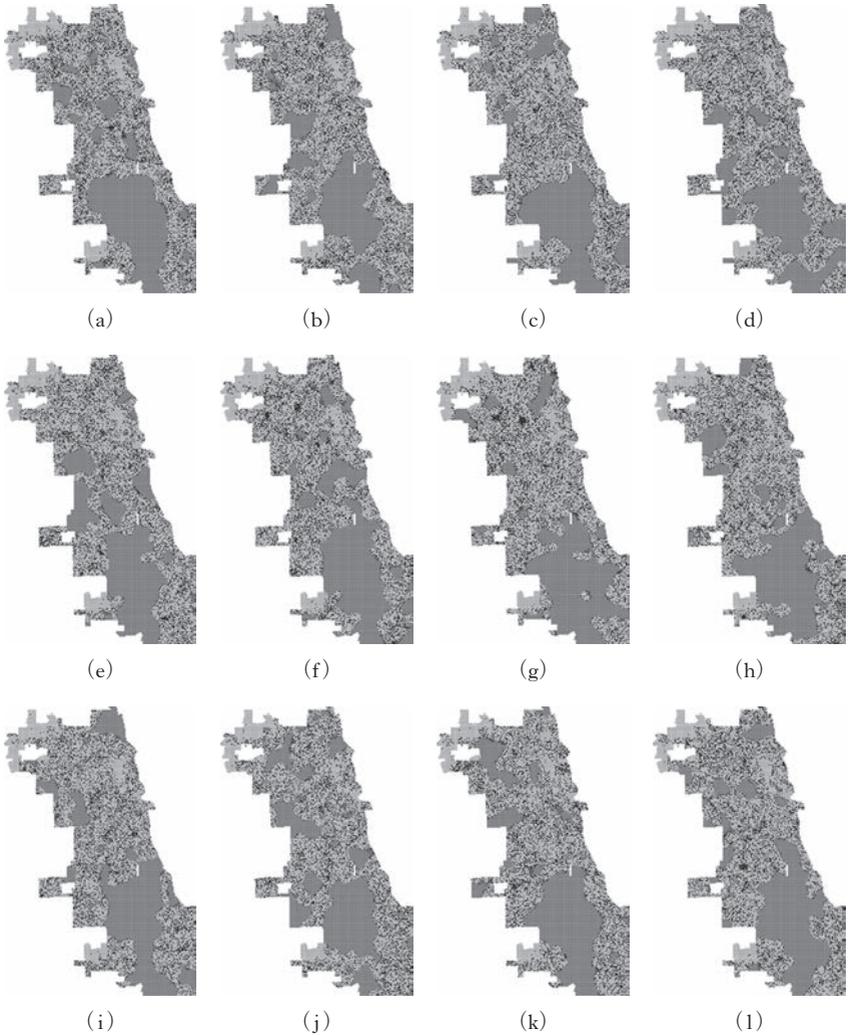


図 5: シカゴの空間データ上における分居モデルの 12 試行

各パネルは 1 試行の均衡状態におけるエージェントの配置を示す。パラメータおよび図 4 (c), (d) に示した黒人と白人の人口比率が高いセンサス単位各 40 に対応する格子におけるエージェントの初期配置はいずれの試行でも固定した。

モデルの構築や空間データとの接合を補助するソフトウェアは、実証的 ABM を構築する技術的障壁を緩和する。

### 参考文献

- Almquist, Zack W. 2010. “US Census spatial and demographic data in R: The UScensus2000 Suite of packages.” *Journal of Statistical Software* 37(6): 1–31.
- Bausch, Andrew W. 2015a. “Democracy, war effort, and the systemic democratic peace.” *Journal of Peace Research* 52(4): 435–447.
- . 2015b. “The Geography of Ethnocentrism.” *Journal of Conflict Resolution* 59(3): 510–527.
- Benenson, Itzhak, Itzhak Omer, and Erez Hatna. 2002. “Entity-based modeling of urban residential dynamics: the case of Yaffo, Tel Aviv.” *Environment and Planning B: Planning and Design* 29(4): 491–512.
- Benenson, Itzhak, Erez Hatna, and Ehud Or. 2009. “From Schelling to spatially explicit modeling of urban ethnic and economic residential dynamics.” *Sociological Methods & Research* 37(4): 463–497.
- Bhavnani, Ravi, Dan Miodownik, and Hyun Jin Choi. 2011. “Three two tango: Territorial control and selective violence in Israel, the West Bank, and Gaza.” *Journal of Conflict Resolution* 55(1): 133–158.
- Bhavnani, Ravi, Karsten Donnay, Dan Miodownik, Maayan Mor, and Dirk Helbing. 2014. “Group segregation and urban violence.” *American Journal of Political Science* 58(1): 226–245.
- Bruch, Elizabeth E. 2014. “How population structure shapes neighborhood segregation.” *American Journal of Sociology* 119(5): 1221–1278.
- Bruch, Elizabeth E., and Robert D. Mare. 2006. “Neighborhood choice and neighborhood change.” *American Journal of Sociology* 112(3): 667–709.
- Charles, Camille Zubrinsky. 2003. “The dynamics of racial residential segregation.” *Annual Review of Sociology* 29(1): 167–207.
- Clark, William A.V. 1991. “Residential preferences and neighborhood racial segregation: A test of the Schelling segregation model.” *Demography* 28(1): 1–19.
- Clark, William A.V., and Mark Fossett. 2008. “Understanding the social context of the Schelling segregation model.” *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 105(11): 4109–4114.
- Crooks, Andrew T. 2008. “Constructing and implementing an agent-based model of residential segregation through vector GIS.” *International Journal of Geographical Information Science* 24(5): 661–675.
- Crooks, Andrew T., Christian Castle, and Michael Batty. 2008. “Key challenges in agent-based modelling for geo-spatial simulation.” *Computers, Environment and Urban Systems* 32(6): 417–430.
- de Marchi, Scott, and Scott E. Page. 2014. “Agent-Based Models.” *Annual Review of Political Science* 17(1): 5.1–5.20.

- Epstein, Joshua, and Robert Axtell. 1996. *Growing artificial societies: Social science from the bottom up*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Farley, Reynolds, Howard Schuman, Suzanne Bianchi, Diane Colasanto, and Shirley Hatchett. 1978. “Chocolate city, vanilla suburbs: Will the trend toward racially separate communities continue?.” *Social Science Research* 7(4): 319–344.
- Findley, Michael, and Peter Rudloff. 2012. “Combatant Fragmentation and the Dynamics of Civil Wars.” *British Journal of Political Science* 42(4): 879–901.
- Fossett, Mark, and Warren Waren. 2005. “Overlooked implications of ethnic preferences for residential segregation in agent-based models.” *Urban Studies* 42(11): 1893–1917.
- Gartzke, Erik, and Alex Weisiger. 2013. “Permanent Friends? Dynamic Difference and the Democratic Peace.” *International Studies Quarterly* 57(1): 171–85.
- Gilbert, Nigel. 2008. *Agent-based models*. Los Angeles: Sage Publications.
- Gleditsch, Kristian Skrede, and Nils B. Weidmann. 2012. “Richardson in the information age: Geographic information systems and spatial data in international studies.” *Annual Review of Political Science* 15: 8.1–8.21.
- Hatna, Erez, and Itzhak Benenson. 2014. “Combining segregation and integration: Schelling model dynamics for heterogeneous population.” <http://arxiv.org/abs/1406.5215>.
- 伊藤岳. 2013. 「国際関係論におけるシミュレーション技法の展開: 理論研究と実証研究の架橋」『国際関係論研究』第30巻, 43–63頁.
- Ito, Gaku. 2015a. “Modeling the spatial patterns of insurgent violence in Afghanistan.” Paper prepared for Kobe Sakura Meeting 2015: The 5th International Conferences for Collaborative Research, Kobe University, April 8–10, 2015.
- . 2015b. “The insurgent disease? Simulating the geography of insurgent violence.” Working Paper Series: Study on Artificial Societies, No. 48.
- . 2015c. “A closer look at the drivers of insurgent violence in Afghanistan.” Paper prepared for the Kobe CROP-IT Scientific IR meeting, Kobe University, Kobe, November 30, 2015.
- Ito, Gaku, and Susumu Yamakage. 2015a. “From KISS- to TASS-modeling: A preliminary analysis of the segregation model incorporated with spatial data on Chicago.” *Japanese Journal of Political Science* 16(4): 553–573.
- . 2015b. “Comparing and evaluating the determinants of insurgent violence: A microlevel comparative analysis on Afghanistan and Russia’s North Caucasus.” Paper prepared for “実証政治学の最先端学術会議,” October 9, 2015.
- Kim, Jae-Woo, and Robert A. Hanneman. 2014. “Coevolutionary Dynamics of Cultural Markers, Parochial Cooperation, and Networks.” *Journal of Conflict Resolution* 58(2): 226–253.
- Klasnja, Marko, and Natalija Novta. 2014. “Segregation, Polarization, and Ethnic Conflict.” *Journal of Conflict Resolution*.
- Laurie, Alexander J., and Narendra K. Jaggi. 2003. “Role of ‘vision’ in neighbourhood racial segregation: A variant of the Schelling segregation model.” *Urban Studies* 40(13): 2687–2704.
- Lim, May, Richard Metzler, and Yaneer Bar-Yam. 2007. “Global pattern formation and

- ethnic/cultural violence.” *Science* 317(5844): 1540–1544.
- Logan, John R, Brian Stults, Advisory Board, Margo Anderson, Suzanne Bianchi, Barry Bluestone, Sheldon Danziger, Claude Fischer, Daniel Lichter, and Kenneth Prewitt. 2011. “The persistence of segregation in the metropolis: New findings from the 2010 census.” Census Brief prepared for Project US2010. Available at <http://www.s4.brown.edu/us2010>. Accessed August 19, 2014.
- Macy, Michael W., and Robert Willer. 2002. “From factors to actors: Computational sociology and agent-based modeling.” *Annual Review of Sociology* 28(1): 143–166.
- Miodownik, Dan, and Ravi Bhavnani. 2011. “Ethnic minority rule and civil war onset: How identity salience, fiscal policy, and natural resource profiles moderate outcomes.” *Conflict Management and Peace Science* 28(5): 438–458.
- 光辻克馬・山影進. 2009. 「国際政治学における実証分析とマルチエージェント・シミュレーションの架橋」『国際政治』第155巻, 18–40頁.
- 阪本拓人. 2011. 『領域統治の統合と分裂: 北東アフリカ諸国を事例とするマルチエージェント・シミュレーション分析』書籍工房早山.
- 阪本拓人・保城広至・山影進. 2012. 『ホワイトハウスのキューバ危機: マルチエージェント・シミュレーションで探る核戦争回避の分水嶺』書籍工房早山.
- Schelling, Thomas C. 1969. “Models of segregation.” *American Economic Review* 59(2): 488–493.
- . 1971. “Dynamic models of segregation.” *Journal of Mathematical Sociology* 1(2): 143–186.
- . 1978. *Micromotives and macrobehavior*. New York: W. W. Norton.
- Siegel, David A. 2009. “Social networks and collective action.” *American Journal of Political Science* 53(1): 122–138.
- . 2011. “When does repression work? Collective action in social networks.” *Journal of Politics* 73(4): 993–1010.
- . 2013. “Social networks and the mass media.” *American Political Science Review* 107(4): 786–805.
- Vinkovic, Dejan, and Alan Kirman. 2006. “A physical analogue of the Schelling model.” *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 103(51): 19261–19265.
- Weidmann, N. B. 2015. “Micro-cleavages and violence in civil wars: A computational assessment.” *Conflict Management and Peace Science*. forthcoming
- Weidmann, Nils B., and Idean Salehyan. 2013. “Violence and ethnic segregation: A computational model applied to Baghdad.” *International Studies Quarterly* 57(1): 52–64.
- 山影進. 2007. 『人工社会構築指南』書籍工房早山.
- 山本和也. 2009. 「シミュレーション: 過激派ネットワークの形成」日本国際政治学会編『日本の国際政治学 1: 学としての国際政治』有斐閣.
- Yin, Li. 2009. “The dynamics of residential segregation in Buffalo: An agent-based simulation.” *Urban Studies* 46(13): 2749–2770.